

頂点代数

の定義と具体例だけ

箱星 著

はじめに

この探究録は、頂点代数について筆者が行った探究の記録である。

頂点代数は数学や物理学で盛んに研究されている代数系である。様々な分野との関わりを紹介したいと思っているが、現時点では定義と具体例のみを扱う。

謝辞

筆者に頂点代数を紹介してくださった修士課程当時の指導教員に感謝します。

また、この探究録は「篠澤広に物理学を解説してもらおう合同 II」に寄稿した記事「アイドルの頂点を目指す者～頂点代数入門講義～」を元にしています。合同誌の主催者をはじめとした関係者の皆様および篠澤広さんに感謝します。

ライセンス

クリエイティブ・コモンズ表示 4.0 のもとで公開します。

This work is licensed under CC BY 4.0. To view a copy of this license, visit <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

連絡先

誤植などを発見された場合は、以下のいずれかからご連絡ください。

- Twitter: @hakoboshi_e
- Fediverse: @hako@misskey.flowers
- mixi2: @hakoboshi
- Bluesky: @hakoboshi.bsky.social
- その他: <https://lit.link/hakoboshi>

更新履歴

- v0.1.0 (2026/04/25) 初稿

目次

はじめに	2
1. 頂点代数	4
1.1. 頂点代数の定義	4
1.2. 形式的冪級数	5
1.3. translation	6
1.4. 頂点代数の定義の同値性	6
1.5. 正規順序積	10
1.6. Dong の補題と Goddard の一意性定理	10
1.7. 頂点代数の具体例	12
1.7.1. Heisenberg 頂点代数	12
参考文献	14

1. 頂点代数

1.1. 頂点代数の定義

まず頂点代数を定義する。

定義 1.1.1: V を標数 0 の体上のベクトル空間とする。各 $n \in \mathbb{Z}$ に対して双線形な積 $V \times V \rightarrow V, (a, b) \mapsto a_{(n)}b$ が定まっている。 V が**頂点代数**であるとは、次をみたすことをいう。

1. (local truncation) 任意の $a, b \in V$ に対してある整数 N が存在して、任意の整数 $n \geq N$ に対して $a_{(n)}b = \mathbf{0}$ をみたす。
2. (Borcherds identity) 任意の $a, b, c \in V, p, q, r \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{p}{i} (a_{(r+i)}b)_{(p+q-i)} c = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{r}{i} a_{(p+r-i)} (b_{(q+i)}c) - \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{r-i} \binom{r}{i} b_{(q+r-i)} (a_{(p+i)}c) \quad (1)$$

が成り立つ。

3. (vacuum) 次をみたす $\mathbb{1} \in V$ が存在する：任意の $a \in V$ に対して

$$\mathbb{1}_{(n)}a = \begin{cases} \mathbf{0} & (n \neq -1) \\ a & (n = -1) \end{cases} \quad (2)$$

$$a_{(n)}\mathbb{1} = \begin{cases} \mathbf{0} & (n \geq 0) \\ a & (n = -1) \end{cases}$$

Borcherds identity は複雑である。この等式には様々な情報が含まれており、 p, q, r に具体的な値を代入することで情報を取り出すことができる。

例 1.1.2: Borcherds identity で $p = q = r = 0$ の場合

$$(a_{(0)}b)_{(0)}c = a_{(0)}(b_{(0)}c) - b_{(0)}(a_{(0)}c) \quad (3)$$

となる。これは Lie 代数の理論で登場する Jacobi identity である。

例 1.1.3: Borcherds identity で $(p, q, r) = (m, n, 0)$ とすると

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{m}{i} (a_{(i)}b)_{(m+n-i)} c = a_{(m)}(b_{(n)}c) - b_{(n)}(a_{(m)}c) \quad (4)$$

となる。

例 1.1.4: Borcherds identity で $(p, q, r) = (0, n, m)$ とすると

$$(a_{(m)}b)_{(n)}c = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{m}{i} a_{(m-i)}(b_{(n+i)}c) - \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} b_{(m+n-i)}(a_{(i)}c) \quad (5)$$

となる。

$a \in V, n \in \mathbb{Z}$ に対して $a_{(n)}$ を、 $b \in V$ を $a_{(n)}b \in V$ に移す写像と定める。これは線形写像である。また $[a_{(m)}, b_{(n)}] = a_{(m)} \circ b_{(n)} - b_{(n)} \circ a_{(m)}$ を交換子とする。例 1.1.3 より

- 任意の $k \geq 0$ に対して $a_{(k)}b = 0$
- 任意の $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して $[a_{(m)}, b_{(n)}] = 0$

は同値であることがわかる。任意の $a, b \in V$ に対してこれが成り立つような頂点代数を可換な頂点代数という。

命題 1.1.5: 有限次元頂点代数は可換である。

証明: あとで書く

←
END

この命題から、探究すべき頂点代数は無限次元であることがわかる。

1.2. 形式的冪級数

この頂点代数の定義では可算個の積を扱う必要がある。これから、冪級数を用いて頂点代数を定義し、2つの定義が同値であることを見る。そのために、まずは形式的冪級数の基礎を扱う。

R を係数の集合とする。 z を形式的な変数、 a_n ($n \in \mathbb{Z}$) を R の元とするとき、 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ を形式的冪級数と呼ぶ。形式的冪級数全体からなる集合を $R[[z, z^{-1}]]$ とする。形式的冪級数 f における z^n の係数が a_n であることを $a_n = [z^n]f$ のように表す。

以下のような $R[[z, z^{-1}]]$ の部分集合を考える。

- $R[z]$: 正冪の方向に有限、負冪はなし
- $R[z, z^{-1}]$: 正冪、負冪の方向ともに有限
- $R[[z]]$: 正冪の方向に無限でもよい、負冪はなし
- $R[[z]][z^{-1}]$: 正冪の方向に無限でもよい、負冪の方向に有限

ここで負冪がないとは $n < 0$ ならば $a_n = 0$ となることとし、負冪の方向に有限とはある M が存在して $n < M$ ならば $a_n = 0$ となることとする。正冪についても同様である。

2つの形式的な変数 z, w に関する冪級数を考えることもある。この場合、 $(z + w)^m$ の扱いには注意が必要である。 $\frac{w}{z}$ に関する級数として見たものを

$$i_{z,w}(z + w)^m = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m}{i} z^{m-i} w^i \quad (6)$$

と表し、 $\frac{z}{w}$ に関する級数として見たものを

$$i_{w,z}(z+w)^m = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m}{i} z^i w^{m-i} \quad (7)$$

と表す。 m が非負整数のとき両者は一致する。

以上をもとにして頂点代数を扱う。 V を頂点代数、 $a \in V$ とし、

$$Y(a, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1} \in (\mathbf{End} V)[[z, z^{-1}]] \quad (8)$$

と定義する。すると $b \in V$ に対し

$$Y(a, z)b = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{(n)} b z^{-n-1} \in V[[z]][z^{-1}] \quad (9)$$

となる。ここで local truncation を用いた。このことから、 $Y(a, z)$ は field と呼ばれる。

1.3. translation

写像 $T: V \rightarrow V$ を $Ta = a_{(-2)}\mathbb{1}$ により定める。これは線形写像である。

補題 1.3.1: $k \geq 0$ に対して

$$\frac{T^k}{k!} a = a_{(-k-1)}\mathbb{1} \quad (10)$$

証明: Borcherds identity に $b = c = \mathbb{1}, p = 0, q = -m - 1, r = -n - 1 (m, n \geq 0)$ を代入すると

$$(a_{(-n-1)}\mathbb{1})_{(-m-1)}\mathbb{1} = \binom{m+n}{m} a_{(-m-n-1)}\mathbb{1} \quad (11)$$

が得られ、ここから帰納的にわかる。

←
END

指数関数のマクローリン展開の類似として

$$e^{zT} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T^k z^k \quad (12)$$

と定める。

補題 1.3.2:

$$Y(a, z)\mathbb{1} = e^{zT} a \quad (13)$$

証明: 上の補題からわかる。

←
END

1.4. 頂点代数の定義の同値性

まず、頂点代数から得られる $Y(a, z)$ がみたす性質を述べる。

命題 1.4.1: V を頂点代数とする。このとき次が成り立つ。

1. (vacuum axiom) $Y(\mathbf{1}, z) = \mathbf{id}_V$ かつ任意の $a \in V$ に対して $Y(a, z)\mathbf{1} = a + O(z)$
2. (translation axiom) $T\mathbf{1} = \mathbf{0}$ かつ任意の $a \in V$ に対して $[T, Y(a, z)] = \partial_z Y(a, z)$
3. (locality axiom) 任意の $a, b \in V$ に対して $Y(a, z), Y(b, w)$ は互いに local である。
すなわち、ある整数 $N \geq 0$ が存在して

$$(z-w)^N [Y(a, z), Y(b, w)] = \mathbf{0} \in (\mathbf{End} V)[[z, z^{-1}, w, w^{-1}]] \quad (14)$$

をみたす。

証明: 1 は明らか。2 は Borchers identity に $c = \mathbf{1}, p = \mathbf{0}, q = -2, r = n$ を代入すると

$$T(a_{(n)}b) = a_{(n)}(Tb) - na_{(n-1)}b \quad (15)$$

となることからわかる。3 について、 $k \geq N$ ならば $a_{(k)}b = \mathbf{0}$ となるような N をとる。Borchers identity で $(p, q, r) = (m, n, N)$ とすると

$$\mathbf{0} = \sum_{i=0}^N (-1)^i \binom{N}{i} a_{(m+N-i)}(b_{n+i}c) - \sum_{i=0}^N (-1)^{N-i} b_{(n+N-i)}(a_{(m+i)}c) \quad (16)$$

となる。 $(z-w)^N Y(a, z)Y(b, w)c$ の $z^{-m-1}w^{-n-1}$ の係数が右辺第 1 項であり、 $(z-w)^N Y(b, w)Y(a, z)c$ の $z^{-m-1}w^{-n-1}$ の係数が右辺第 2 項である。 ← END

この節での目標は、この命題を定義として採用したとき、頂点代数の性質をみたすことである。

定理 1.4.2: V を標数 0 の体上のベクトル空間、 $\mathbf{1} \in V, T \in \mathbf{End} V, Y(-, z)$ を線形写像 $V \rightarrow (\mathbf{End} V)[[z, z^{-1}]]$ であって各 $Y(a, z)$ が field であるもの、すなわち $Y(a, z)b$ が $V[[z]][z^{-1}]$ の元になるものとする。これらは

1. (vacuum axiom) $Y(\mathbf{1}, z) = \mathbf{id}_V$ かつ任意の $a \in V$ に対して $Y(a, z)\mathbf{1} = a + O(z)$
2. (translation axiom) $T\mathbf{1} = \mathbf{0}$ かつ任意の $a \in V$ に対して $[T, Y(a, z)] = \partial_z Y(a, z)$
3. (locality axiom) 任意の $a, b \in V$ に対して $Y(a, z), Y(b, w)$ は互いに local である。
すなわち、ある整数 $N \geq 0$ が存在して

$$(z-w)^N [Y(a, z), Y(b, w)] = \mathbf{0} \in (\mathbf{End} V)[[z, z^{-1}, w, w^{-1}]] \quad (17)$$

をみたす。

をみたすとする。このとき、 $a_{(n)}b = [z^{-n-1}]Y(a, z)b$ とすることで V は頂点代数となる。

Borchers identity 以外は簡単に確かめられる。また

$$\begin{aligned}
B_1 &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{p}{i} (a_{(r+i)} b)_{(p+q-i)} c \\
B_2 &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{r}{i} a_{(p+r-i)} (b_{(q+i)} c) \\
B_3 &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{r-i} \binom{r}{i} b_{(q+r-i)} (a_{(p+i)} c)
\end{aligned} \tag{18}$$

とおくと、各 $k = 1, 2, 3$ に対して

$$B_k(p+1, q, r) = B_k(p, q+1, r) + B_k(p, q, r+1) \tag{19}$$

が成り立つことがわかる。これより、 $(p+1, q, r), (p, q+1, r), (p, q, r+1)$ のうち 2 つで Borcherds identity が成り立てばもう 1 つでも成り立つ。これより、Borcherds identity を

- 任意の $m, n \in \mathbb{Z}$ に対してある $N \geq 0$ が存在して $(p, q, r) = (m, n, N)$
- 任意の $m, n \in \mathbb{Z}$ に対してある $L \geq 0$ が存在して $(p, q, r) = (L, n, m)$

の場合に証明すればよい。前者は上での議論からわかる。後者について、 $k \geq L$ ならば $a_{(k)} c = 0$ となるとすると $(p, q, r) = (L, n, m)$ の場合は次のような命題である。

命題 1.4.3:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{L}{i} (a_{(m+i)} b)_{(n+L-i)} c = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{m}{i} a_{(m+L-i)} (b_{(n+i)} c) \tag{20}$$

命題の証明のために補題を用意する。

補題 1.4.4 (Taylor の公式):

$$e^{x\partial_z} Y(a, z) = i_{z,x} Y(a, x+z) \tag{21}$$

証明:

$$\begin{aligned}
e^{x\partial_z} Y(a, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \partial_z^k x^k \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n-1}{k} x^k \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-k-1} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{(n)} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n-1}{k} x^k z^{-n-k-1} \\
&= \sum_n a_{(n)} i_{z,x} (x+z)^{-n-1} \\
&= i_{z,x} Y(a, x+z)
\end{aligned} \tag{22}$$

←
END

補題 1.4.5:

$$e^{xT}Y(a, z) = e^{x\partial_z}Y(a, z)e^{xT} = i_{z,x}Y(a, x+z)e^{xT} \quad (23)$$

証明: $[T, Y(a, z)] = \partial_z Y(a, z)$ より $TY(a, z) = \partial_z Y(a, z) + Y(a, z)T$ となる。帰納的に

$$T^m Y(a, z) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \partial_z^k Y(a, z) T^{m-k} \quad (24)$$

となる。これより $e^{xT}Y(a, z) = e^{x\partial_z}Y(a, z)e^{xT}$ となる。残りは上の補題から従う。 ← END

命題 1.4.6 (skew-symmetry):

$$Y(a, z)b = e^{zT}Y(b, -z)a \quad (25)$$

証明: locality より十分大きな N に対して

$$(z-w)^N Y(a, z)Y(b, w)\mathbb{1} = (z-w)^N Y(b, w)Y(a, z)\mathbb{1} \quad (26)$$

となる。補題 1.3.2 より

$$(z-w)^N Y(a, z)e^{wT}b = (z-w)^N Y(b, w)e^{zT}a \quad (27)$$

となる。補題 1.4.5 より

$$(z-w)^N Y(a, z)e^{wT}b = (z-w)^N e^{zT}i_{w,z}Y(b, w-z)a \quad (28)$$

となる。 N を十分大きくとれば、右辺に $w-z$ の負冪がないようにできる。 $w=0$ を代入して z^N で割ればよい。 ← END

これらを用いて 命題 1.4.3 を証明する。

証明:

$$\begin{aligned} i_{x,z}Y(a, x+z)Y(b, z)c &= i_{x,z}Y(a, x+z)e^{zT}Y(c, -z)b \\ &= e^{zT}Y(a, x)Y(c, -z)b \end{aligned} \quad (29)$$

一方

$$\begin{aligned} Y(Y(a, x)b, z)c &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} x^{-n-1} Y(a_{(n)}b, z)c \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} x^{-n-1} e^{zT}Y(c, -z)a_{(n)}b \\ &= e^{zT}Y(c, -z)Y(a, x)b \end{aligned} \quad (30)$$

となる。 $Y(a, x)$ と $Y(c, -z)$ は互いに local なので、ある $L \geq 0$ に対して

$$(x+z)^L Y(Y(a, x)b, z)c = (x+z)^L i_{x,z}Y(a, x+z)Y(b, z)c \quad (31)$$

が成り立つ。係数を比較すればよい。 ← END

以上により頂点代数の定義の同値性が示された。

1.5. 正規順序積

$Y(-, z)$ を用いた頂点代数の定義も Borcherds identity をみたまことを証明した。よって特殊な場合である例 1.1.4 もみたま。これを $Y(-, z)$ を用いて書き直す。

例 1.1.4 の左辺は $[z^{-n-1}]Y(a_{(m)}b, z)$ に等しい。右辺について、 Res_z を z^{-1} の係数を取り出す操作とし、 $a(z), b(z) \in R[[z, z^{-1}]]$ とするとき

$$a(w)_{(m)}b(w) = \text{Res}_z i_{z,w}(z-w)^m a(z)b(w) - \text{Res}_z i_{w,z}(z-w)^m b(w)a(z) \quad (32)$$

と定義する。このとき例 1.1.4 の右辺は $Y(a, z)_{(m)}Y(b, z)$ に等しくなる。よって次が成り立つ。

命題 1.5.1: $a, b \in V, m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$Y(a_{(m)}b, z) = Y(a, z)_{(m)}Y(b, z) \quad (33)$$

が成り立つ。

$m = -1$ のときは特別である。 $a(z) \in R[[z, z^{-1}]]$ に対して

$$\begin{aligned} a(z)_+ &= \sum_{n < 0} a_n z^{-n-1} \\ a(z)_- &= \sum_{n \geq 0} a_n z^{-n-1} \end{aligned} \quad (34)$$

とおき、 $: a(z)b(w) := a(z)_+b(w) + b(w)a(z)_-$ とおく。これを正規順序積という。このとき、 $: a(z)b(z) := a(z)_{(-1)}b(z)$ が成り立つ。

また、命題 1.5.1 に $m = -2, b = \mathbb{1}$ を代入することで次を得る。

系 1.5.2:

$$Y(Ta, z) = \partial_z Y(a, z) \quad (35)$$

1.6. Dong の補題と Goddard の一意性定理

補題 1.6.1 (Dong): $a(z), b(z), c(z)$ を互いに local な field とする。このとき $: a(z)b(z) :$ と $c(z)$ も互いに local である。より一般に $n \in \mathbb{Z}$ に対して、 $a(z)_{(n)}b(z)$ と $c(z)$ も互いに local である。

証明: 十分大きな M に対して

$$\begin{aligned} & (x-w)^M \left(\operatorname{Res}_z i_{z,w} (z-w)^n a(z)b(w) - \operatorname{Res}_z i_{w,z} (z-w)^n b(w)a(z) \right) c(x) \\ &= (x-w)^M c(x) \left(\operatorname{Res}_z i_{z,w} (z-w)^n a(z)b(w) - \operatorname{Res}_z i_{w,z} (z-w)^n b(w)a(z) \right) \end{aligned} \quad (36)$$

を示せばよい。 $M = M_1 + M_2$ とすると

$$(x-w)^M = (x-w)^{M_1} \sum_{i=0}^{M_2} \binom{M_2}{i} (x-z)^{M_2-i} (z-w)^i \quad (37)$$

となる。 M_1 を十分大きくとれば $b(w), c(x)$ の順番を入れ替えられる。 i が小さいとき、 M_2 を大きくとれば $a(z), c(x)$ の順番を入れ替えられる。 i が大きいとき、 $n < 0$ のときは $(z-w)^{-n} (i_{z,w} (z-w)^n - i_{w,z} (z-w)^n) = 0$ かつ $a(z), b(w)$ の順番を入れ替えられることを用いるとよい。 $n \geq 0$ のときは簡単。 ← END

定理 1.6.2 (Goddard の一意性定理): $A(z)$ を field とする。任意の $b \in V$ に対して $A(z), Y(b, z)$ は互いに local であり、かつ $A(z)\mathbb{1} = Y(a, z)\mathbb{1}$ をみたす $a \in V$ が存在するとする。このとき $A(z) = Y(a, z)$ が成り立つ。

証明: $b \in V$ および十分大きな N に対して

$$\begin{aligned} (z-w)^N A(z)Y(b, w)\mathbb{1} &= (z-w)^N Y(b, w)A(z)\mathbb{1} \\ &= (z-w)^N Y(b, w)Y(a, z)\mathbb{1} \\ &= (z-w)^N Y(a, z)Y(b, w)\mathbb{1} \end{aligned} \quad (38)$$

が成り立つ。 vacuum axiom よりこれは w に関する負幂を含まない。 $w = 0$ を代入して z^N で割ると $Y(a, z)b = A(z)b$ を得る。これが任意の $b \in V$ に対して成り立つので、 $Y(a, z) = A(z)$ を得る。 ← END

Goddard の一意性定理の仮定の一部は次のようにして確かめることができる。

命題 1.6.3: $A(z)$ を field とし、 $a \in V$ とする。 $\partial_z A(z)\mathbb{1} = TA(z)\mathbb{1}$ かつ $A(z)\mathbb{1}|_{z=0} = a$ をみたすとする。このとき $A(z)\mathbb{1} = Y(a, z)\mathbb{1}$ が成り立つ。

証明: $A(z)\mathbb{1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n z^{-n-1}$ とおくと、仮定より $n \geq 0$ ならば $b_n = 0$ かつ $b_{-1} = a$ である。さらに $Tb_n = -nb_{n-1}$ なので帰納的に $b_{-k-1} = \frac{T^k}{k!} a$ を得る。よって

$$A(z)\mathbb{1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} a z^k = Y(a, z)\mathbb{1} \quad (39)$$

← END

1.7. 頂点代数の具体例

ここでようやく具体例を扱う。定理 1.4.2 より、頂点代数を定義するには

- ベクトル空間 V
- $\mathbf{1} \in V$
- $T \in \mathbf{End} V$
- $Y(-, z)$

を与えればよい。

1.7.1. Heisenberg 頂点代数

まず Heisenberg 頂点代数を構成する。 $V = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$ とし、 $\mathbf{1} = \mathbf{1}$ とする。 $a_{(n)} \in \mathbf{End} V$ を、 $p \in V$ に対して

$$a_{(n)}p = \begin{cases} x_{-n}p & n < 0 \\ \mathbf{0} & n = 0 \\ n \frac{\partial}{\partial x_n} p & n > 0 \end{cases} \quad (40)$$

により定める。

$$a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1} \quad (41)$$

とおくとこれは field である。

$Y(-, z)$ を定める。定理 1.4.2 の仮定より $Y(\mathbf{1}, z) = \mathbf{id}_V$ が要請されている。次に $Y(x_1, z) = a(z)$ と定める。定理 1.4.2 の仮定で $[T, a(z)] = \partial_z a(z)$ かつ $T\mathbf{1} = \mathbf{0}$ が要請されており、これらを用いると単項式 $m \in V$ に対して

$$Tx_{-n}m = Ta_{(n)}m = a_{(n)}Tm + [T, a_{(n)}]m \quad (42)$$

となるので、帰納的に Tm が定まる。線形性で拡張して $T \in \mathbf{End} V$ が定まる。

話を戻して $Y(x_2, z)$ を考える。系 1.5.2 より $Y(x_2, z) = Y(Tx_1, z) = \partial_z a(z)$ となる。同様にして

$$Y(x_k, z) = \frac{\mathbf{1}}{(k-1)!} \partial_z^{k-1} a(z) \quad (43)$$

となる。

次に $Y(x_1^2, z)$ を考える。 $x_{1(-1)}x_1 = a_{(-1)}x_1 = x_1^2$ より

$$Y(x_1^2, z) = Y(x_1, z)_{(-1)}Y(x_1, z) =: a(z)a(z) : \quad (44)$$

となる。一般の単項式に対しても正規順序積の繰り返しで

$$Y(x_{j_1} \cdots x_{j_n}, z) = \frac{\mathbf{1}}{(j_1-1)! \cdots (j_n-1)!} : \partial_z^{j_1-1} a(z) \cdots \partial_z^{j_n-1} a(z) : \quad (45)$$

が成り立つ。結合の順番に注意せよ。

式 45 を線形に拡張して、すべての $a \in V$ に対して $Y(a, z)$ が定義される。

これらが定理 1.4.2 の仮定をみたすことを確かめる。vacuum axiom は明らか。translation axiom は、まず $[T, a(z)] = \partial_z a(z)$ が成り立つ。次を示せばよい。

補題 1.7.1.1: $[T, b(z)] = \partial_z b(z), [T, c(z)] = \partial_z c(z)$ ならば

$$[T, : b(z)c(z) :] = \partial_z : b(z)c(z) : \quad (46)$$

証明: $: b(z)c(z) := b(z)_+ c(z) + c(z)b(z)_-$ であり、 $\partial_z (b(z)_\pm) = (\partial_z b(z))_\pm$ なので

$$\partial_z : b(z)c(z) := (\partial_z b(z))c(z) + : b(z)(\partial_z c(z)) : \quad (47)$$

である。一方、仮定を用いて計算すると $[T, : b(z)c(z) :]$ も上の式に等しいことがわかる。 ←
END

最後に locality axiom を確かめる。

$$[a(z), a(w)] = \sum_n n z^{-n-1} w^{n-1} \quad (48)$$

なので

$$(z-w)^2 [a(z), a(w)] = 0 \quad (49)$$

となる。補題 1.6.1 より、 $\partial_z^k a(z)$ と $\partial_z^l a(z)$ が互いに local であることを確かめればよい。 $a(z), b(w)$ が互いに local であるとし、 $(z-w)^N [a(z), b(w)] = 0$ とするとき、両辺を z で偏微分して $(z-w)$ をかけると $(z-w)^{N+1} [\partial_z a(z), b(w)] = 0$ となる。これを繰り返せばよい。

以上により頂点代数であることが確かめられた。この頂点代数を **Heisenberg 頂点代数** と呼ぶ。

参考文献

1. Matsuo, A.: Lectures on vertex algebras. In Algebraic combinatorics and the monster group. Cambridge University Press. (2024)
2. Frenkel, E., Ben-Zvi, D.: Vertex algebras and algebraic curves. American Mathematical Society (2004)
3. Kac, V.G., Raina, A.K., Rozhkovskaya, N.: Bombay lectures on highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras. World Scientific (2013)