頂点作用素と Hall–Littlewood 多項式

箱星 (hako111223)

2024 年 8 月 28 日

概要

Jing による頂点作用素を用いた Hall–Littlewood 多項式の実現について解説する。

目次

1 Hall–Littlewood 多項式

$x_1, \ldots, x_n, t$ を変数とする。$x = (x_1, \ldots, x_n)$ とおく。$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ を長さが n 以下の分割とする。m_i を i に等しい λ の成分の個数とする。ただし $m_0 = n - l$ とする。

$$v_m(t) = \prod_{j=1}^{m} \frac{1-t^j}{1-t}$$

$$v_\lambda(t) = \prod_{i \geq 0} v_{m_i}(t)$$

とおく。多項式 $P_\lambda(x;t)$ を

$$P_\lambda(x;t) = \frac{1}{v_\lambda(t)} \sum_{w \in S_n} w \left(x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i - t x_j}{x_i - x_j} \right)$$

により定める。ここで対称群 S_n は $x_1, \ldots, x_n$ の置換として作用する。また

$$\varphi_m(t) = \prod_{j=1}^{m} (1-t^j)$$

$$b_\lambda(t) = \prod_{i \geq 1} \varphi_{m_i}(t)$$

とおく。多項式 $Q_\lambda(x;t)$ を

$$Q_\lambda(x;t) = b_\lambda(t) P_\lambda(x;t)$$

により定める。$P_\lambda(x;t), Q_\lambda(x;t)$ をともに **Hall–Littlewood 多項式**と呼ぶ。

Schur 多項式 $s_\lambda(x)$ は $s_\lambda(x) = P_\lambda(x;0) = Q_\lambda(x;0)$ をみたす。つまり Hall–Littlewood 多項式は Schur 多項式の一般化である。

2 上昇作用素

Q_λ がある関数 $G(z_1,\dots,z_l)$ の係数として現れることを示す。まずは λ が一行のときを考える。$q_r = Q_{(r)}$ とおく。

補題 2.1.

$$G(z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - tx_i z}{1 - x_i z}$$

とおくと

$$G(z) = \sum_{r=0}^{\infty} q_r z^r$$

が成り立つ。

証明. q_r は $r > 0$ のとき

$$\begin{aligned} q_r &= (1-t)P_{(r)} \\ &= (1-t)\sum_{i=1}^{n} x_i^r \prod_{j\neq i} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j} \end{aligned}$$

と表せる。一方、部分分数分解により

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{u - tx_i}{u - x_i} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{(1-t)x_i}{u - x_i} \prod_{j\neq i} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j}$$

となる。$u = z^{-1}$ を代入すると

$$G(z) = 1 + (1-t)\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i z}{1 - x_i z} \prod_{j\neq i} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j}$$

となる。よって $G(z)$ における z^r の係数は q_r であることがわかる。 □

Q_λ が帰納的な公式をもつことを示す。

補題 2.2. $\mu = (\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_l), g_i = (1-t)\prod_{j\neq i} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j}$ とおき、$Q_\mu^{(i)}$ を Q_μ に $x_i = 0$ を代入して得られるものとする。このとき

$$Q_\lambda = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_1} g_i Q_\mu^{(i)}$$

が成り立つ。

証明. $m_0 = n - l$ より

$$v_\lambda(t) = v_{n-l}(t) \prod_{i \geq 1} v_{m_i}(t) = v_{n-l}(t) \frac{b_\lambda(t)}{(1-t)^l}$$

となる。また S_{n-1} を $2, 3, \ldots, n$ の置換群とみなしたとき、S_n の任意の元は $X_n = \{\mathrm{id}, (1,2), \ldots, (1,n)\}$ の元と S_{n-1} の元の積として一意的に表せる。よって

$$\begin{aligned} Q_\lambda(x;t) &= \frac{(1-t)^l}{v_{n-l}(t)} \sum_{w \in S_n} w \left(x_1^{\lambda_1} \cdots x_l^{\lambda_l} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i - t x_j}{x_i - x_j} \right) \\ &= \frac{(1-t)^{l-1}}{v_{n-l}(t)} \sum_{w_1 \in X_n} \sum_{w_2 \in S_{n-1}} w_1 w_2 \left(x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_l^{\lambda_l} g_1 \prod_{2 \leq i < j \leq n} \frac{x_i - t x_j}{x_i - x_j} \right) \\ &= \sum_{w_1 \in X_n} w_1 (x_1^{\lambda_1} g_1 Q_\mu^{(1)}) \end{aligned}$$

となる。これは補題の主張と同値。 □

以上の準備のもとで次の命題を示す。

命題 2.3. $Q_\lambda(x;t)$ は

$$G(z_1, \ldots, z_l) = \prod_{i=1}^{l} G(z_i) \prod_{1 \leq i < j \leq l} \frac{1 - z_i^{-1} z_j}{1 - t z_i^{-1} z_j}$$

における $z^\lambda = z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} \cdots z_l^{\lambda_l}$ の係数に等しい。

証明. l に関する帰納法を用いる。$l=1$ のときは補題 2.1 から従う。$l>1$ とする。

$$G(z_1,\ldots,z_l)=G(z_2,\ldots,z_l)G(z_1)\prod_{j=2}^{l}\frac{1-z_1^{-1}z_j}{1-tz_1^{-1}z_j}$$

が成り立つ。

$$\prod_{j=2}^{l}\frac{1-u^{-1}z_j}{1-tu^{-1}z_j}=\sum_{m\geq 0}f_m u^m$$

とべき級数展開する。このとき $G(z_1,\ldots,z_l)$ における $z_1^{\lambda_1}$ の係数は

$$\begin{aligned}
[z_1^{\lambda_1}]G(z_1,\ldots,z_l) &= G(z_2,\ldots,z_l)\left(\sum_{m\geq 0}f_m q_{\lambda_1+m}\right)\\
&= G(z_2,\ldots,z_l)\left(\sum_{m\geq 0}f_m(1-t)\sum_{i=1}^{n}x_i^{\lambda_1+m}\prod_{j\neq i}\frac{x_i-tx_j}{x_i-x_j}\right)\\
&= G(z_2,\ldots,z_l)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\geq 0}f_m x_i^m\right)x_i^{\lambda_1}g_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}G(z_2,\ldots,z_l)\prod_{j\geq 2}\frac{1-x_iz_j}{1-tx_iz_j}x_i^{\lambda_1}g_i\\
&= \sum_{i=1}^{n}G^{(i)}(z_2,\ldots,z_l)x_i^{\lambda_1}g_i
\end{aligned}$$

ここで $G^{(i)}(z_2,\ldots,z_l)$ は $G(z_2,\ldots,z_l)$ に $x_i=0$ を代入して得られるものである。これより

$$[z_1^{\lambda_1}\cdots z_l^{\lambda_l}]G(z_1,z_2,\ldots)=[z_2^{\lambda_2}\cdots z_l^{\lambda_l}]\sum_{i=1}^{n}G^{(i)}(z_2,\ldots,z_l)x_i^{\lambda_1}g_i$$

であり、帰納法の仮定と補題 2.2 を合わせると右辺が Q_λ であることがわかる。 □

系として Q_λ の上昇作用素を用いた表示が得られる。$q_\lambda=q_{\lambda_1}\cdots q_{\lambda_l}$ とする。上昇作用素 R_{ij} は

$$R_{ij}\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_{i-1},\lambda_i+1,\lambda_{i+1},\ldots,\lambda_{j-1},\lambda_j-1,\lambda_{j+1},\ldots,\lambda_l)$$

および

$$R_{i_1j_1}\cdots R_{i_mj_m}q_\lambda=q_{R_{i_1j_1}\cdots R_{i_mj_m}\lambda}$$

により定まる。作用素という名前がついているが、普通の意味での写像ではない。なぜなら、$q_{(2,1)}=q_{(1,2)}$ だが $R_{1,2}q_{(2,1)}=R_{1,2}q_{(1,2)}$ ではないため。

系 2.4.

$$Q_\lambda(x;t)=\prod_{i<j}\frac{1-R_{ij}}{1-tR_{ij}}q_\lambda$$

3　頂点作用素

p_m をべき和対称多項式 $p_m(x) = x_1^m + x_2^m + \cdots$ とする。頂点作用素 $H(z)$ を次のように定める。

$$H(z) = \exp\left(\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} p_n z^n\right) \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{\partial}{\partial p_n} z^{-n}\right)$$

これを z のべき級数に展開して

$$H(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} H_n z^n$$

とする。正規順序積を次のように定める。

$$:H(z)H(w):\ = \exp\left(\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} p_n (z^n + w^n)\right) \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{\partial}{\partial p_n} (z^{-n} + w^{-n})\right)$$

命題 3.1.

$$H(z)H(w) = \,:H(z)H(w):\, \frac{z-w}{z-tw}$$

ここで $\frac{z-w}{z-tw}$ は w/z に関する形式的べき級数である。

証明.　Baker–Campbell–Hausdorff の公式より、$[X,[X,Y]] = [Y,[X,Y]] = 0$ ならば

$$\exp(X)\exp(Y) = \exp\left(X + Y + \frac{1}{2}[X,Y]\right)$$
$$\exp(Y)\exp(X) = \exp\left(Y + X + \frac{1}{2}[Y,X]\right)$$

が成り立つ。これより

$$\begin{aligned} H(z)H(w) &= \,:H(z)H(w):\, \exp\left(\left[-\sum_{n>0} \frac{\partial}{\partial p_n} z^{-n}, \sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} p_n w^n\right]\right) \\ &= \,:H(z)H(w):\, \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} \left(\frac{w}{z}\right)^n\right) \\ &= \,:H(z)H(w):\, \frac{z-w}{z-tw} \end{aligned}$$

となる。 □

Hall–Littlewood 多項式は頂点作用素を用いて表せることを示す。

定理 3.2. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ に対して

$$H_{\lambda_1} \cdots H_{\lambda_l}.1 = Q_\lambda(x;t)$$

が成り立つ。

証明. 命題 3.1 を繰り返し用いることで

$$
\begin{aligned}
H(z_1)\cdots H(z_l).1 &= :H(z_1)\cdots H(z_l): \prod_{1\le i<j\le l} \frac{z_i - z_j}{z_i - tz_j}.1 \\
&= \exp\left(\sum_{i=1}^{l}\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} p_n z_i^n\right) \prod_{1\le i<j\le l} \frac{z_i - z_j}{z_i - tz_j} \\
&= \prod_{i=1}^{l} \exp\left(\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{n} p_n z_i^n\right) \prod_{1\le i<j\le l} \frac{z_i - z_j}{z_i - tz_j} \\
&= \prod_{i=1}^{l} G(z_i) \prod_{1\le i<j\le l} \frac{z_i - z_j}{z_i - tz_j} \\
&= G(z_1, \ldots, z_l)
\end{aligned}
$$

となる。命題 2.3 より z^λ の係数を比較すればよい。 □

参考文献

[1] Naihuan Jing, *Vertex operators and Hall–Littlewood symmetric functions*, Advances in Mathematics **87** (1991), 226-248.

[2] Ian Grant Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials.*, 2nd ed., Oxford: Clarendon Press, 1995.