Kac-Moody 代数

箱

2023 年 6 月 14 日

はじめに

このノートは Kac-Moody 代数への入門用として書かれたものである。未完成なので随時加筆・修正を行う。

目次

1　基礎概念

この節では Kac-Moody 代数の導入のために必要な基礎概念を紹介する。特に断らない限り、複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える。

1.1　Lie 代数

定義 1.1. $\mathbb{C}$ 上の **Lie 代数**とは、複素ベクトル空間 $\mathcal{L}$ に Lie 括弧 $[\cdot,\cdot]\colon \mathcal{L}\times\mathcal{L}\to\mathcal{L}$ を備えたものであって、次を満たすものである。

- Lie 括弧 $[\cdot,\cdot]$ は双線形
- $x, y \in \mathcal{L}$ に対して、$[x,y] = -[y,x]$
- $x, y, z \in \mathcal{L}$ に対して Jacobi 恒等式

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$$

　が成り立つ。

例 1.2. $n \times n$ 複素行列全体の集合を $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ とすると、$[x,y] \coloneqq xy - yx$ により Lie 代数となる。一般に、任意の結合的代数がこの方法で Lie 代数となる。

定義 1.3.
(1) $\mathcal{L}_1$ が Lie 代数 $\mathcal{L}$ の**部分 Lie 代数**であるとは、部分ベクトル空間であり任意の $x, y \in \mathcal{L}_1$ に対して $[x,y] \in \mathcal{L}_1$ をみたすことをいう。
(2) $\mathcal{I}$ が Lie 代数 $\mathcal{L}$ の**イデアル**であるとは、部分ベクトル空間であり任意の $x \in \mathcal{I}, y \in \mathcal{L}$ に対して $[x,y] \in \mathcal{I}$ をみたすことをいう。このとき商空間 $\mathcal{L}/\mathcal{I}$ は Lie 代数となる。これを**商 Lie 代数**という。

例 1.4.

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \coloneqq \{x \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid \operatorname{tr} x = 0\}$$

をトレース 0 の行列からなる $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ の部分集合とすると、これは部分 Lie 代数となる。

括弧積が可換 (すなわち任意の元 x, y に対して $[x,y] = [y,x]$ が成り立つ) とすると、$[y,x] = -[x,y]$ より $2[x,y] = 0$ となる。ゆえに、任意の x, y に対して $[x,y] = 0$ が成り立つような Lie 代数のことを**可換 Lie 代数**と呼ぶ。

Lie 代数の射 $\operatorname{ad}\colon \mathcal{L} \to \mathfrak{gl}(\mathcal{L})$ を

$$\operatorname{ad}(x)(y) = [x,y]$$

により定める。これを随伴表現という。

1.2　テンソル積とテンソル代数

V, W を複素ベクトル空間とする。テンソル積 $V \otimes W$ は、任意の複素ベクトル空間 X に対して双線形写像 $V \times W \to X$ と線形写像 $V \otimes W \to X$ が一対一に対応するような複素ベクトル空間である。正確に述べると次のような性質を満たす。

命題 1.5. V, W を複素ベクトル空間とする。複素ベクトル空間 $V \otimes W$ と双線形写像 $\otimes\colon V \times W \to V \otimes W$ の組であって次の条件を満たすものが同型を除いて一意的に存在する。

> X を複素ベクトル空間、$g\colon V \times W \to X$ を双線形写像とする。このとき線形写像 $f\colon V \otimes W \to X$ であって $g = f \circ \otimes$ をみたすものが一意的に存在する。

証明は [5] などを参照せよ。

V を複素ベクトル空間とする。$n \geq 1$ に対し

$$V^{\otimes n} \coloneqq \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n}$$

と定める。また $V^{\otimes 0} = \mathbb{C}$ とする。**テンソル代数** $T(V)$ を

$$T(V) \coloneqq \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$$

と定める。これは $\otimes$ を積として結合的代数となる。

集合 X 上の自由結合的代数 F とは、写像 $\iota\colon X \to F$ を備えた結合的代数であって次の普遍性をみたすものである：任意の結合的代数 A と写像 $\varphi\colon X \to A$ に対して、代数の射 $\widetilde{\varphi}\colon F \to A$ であって $\widetilde{\varphi} \circ \iota = \varphi$ をみたすものがただ 1 つ存在する。

埋め込み $V \to T(V)$ により、テンソル代数は自由結合的代数となる。

命題 1.6. A を結合的 $\mathbb{C}$ 代数とする。このとき、線形写像 $V \to A$ は代数の射 $T(V) \to A$ に一意的に延長される。

証明. 線形写像 $f\colon V \to A$ に対して、多重線形写像 $f^s\colon V \times \cdots \times V \to A$ を $f^s(v_1, v_2, \ldots, v_s) = f(v_1)f(v_2)\cdots f(v_s)$ により定める。テンソル積の普遍性より線形写像 $\widetilde{f^s}\colon V^{\otimes s} \to A$ が誘導される。これにより代数の射 $T(V) \to A$ が得られる。 $\square$

1.3 自由 Lie 代数

自由 Lie 代数は次の普遍性をもつ Lie 代数である。

定義 1.7. X を集合とする。X 上の**自由 Lie 代数**は、写像 $\iota\colon X \to \mathcal{F}$ を備えた Lie 代数 $\mathcal{F}$ であって次の普遍性を満たすものである：任意の Lie 代数 $\mathcal{L}$ と写像 $\varphi\colon X \to \mathcal{L}$ に対して、Lie 代数の射 $\widetilde{\varphi}\colon \mathcal{F} \to \mathcal{L}$ であって $\widetilde{\varphi} \circ \iota = \varphi$ をみたすものがただ 1 つ存在する。

このような Lie 代数の存在はテンソル代数を用いて示すことができる。

命題 1.8. X 上の自由 Lie 代数は同型を除いて一意的に存在する。

証明. V を X の張るベクトル空間とし、$\mathcal{F}$ を X により生成されたテンソル代数 $T(V)$ の部分 Lie 代数とする。自然な写像 $\iota\colon X \to \mathcal{F}$ を考える。Lie 代数 $\mathcal{L}$ と写像 $\varphi\colon X \to \mathcal{L}$ に対して、φ は線形写像 $V \to \mathcal{L}$ に拡張でき、さらに $T(V)$ の普遍性より代数の射 $T(V) \to \mathcal{L}$ に拡張できる。この射の定義域を $\mathcal{F}$ に制限したものを $\widetilde{\varphi}$ とおくと、条件を満たす。一意性は、$\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ が自由 Lie 代数であるとき $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}', \varphi'\colon \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ が存在して、$\varphi \circ \varphi' = \mathrm{id}_{\mathcal{F}'}, \varphi' \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$ となることから従う。 $\square$

自由 Lie 代数を用いて、生成元と関係式をもつ Lie 代数を定義する。

定義 1.9. $\mathcal{F}$ を集合 X 上の自由 Lie 代数とし、$\{r_j\}_{j\in R}$ を $\mathcal{F}$ の元の族とする。$\{r_j\}_{j\in R}$ により生成された $\mathcal{F}$ のイデアルを $\mathcal{I}$ とするとき、商 Lie 代数 $\mathcal{F}/\mathcal{I}$ のことを $x \in X$ を**生成元**、$r_j = 0$ $(j \in R)$ を**関係式**にもつ Lie 代数と呼ぶ。

例えば $X = \{a, b\}$ で、関係式が $[a, b] - a = 0$ のみであるとするとき、この Lie 代数を

$$\langle a, b \mid [a, b] = a\rangle$$

のように表す。このような表記を Lie 代数の**表示**と呼ぶ。

このノートで扱う Kac-Moody 代数も生成元と関係式により定義される Lie 代数である。

1.4 次数付き Lie 代数

M をアーベル群とする。ベクトル空間 V の M による**次数付け** (あるいは M **グラデーション**) とは、直和分解

$$V = \bigoplus_{\alpha\in M} V_\alpha$$

のことである。元 $v \in V_\alpha$ $(\alpha \in M)$ を**次数** α の**斉次元**という。V の部分空間 U が**次数付き**であるとは

$$U = \bigoplus_{\alpha\in M} (U \cap V_\alpha)$$

をみたすことをいう。

補題 1.10. $\mathfrak{h}$ を可換 Lie 代数とし、V を対角化可能 $\mathfrak{h}$ 加群、すなわち

$$V = \bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} V_\lambda, \quad ここで\ V_\lambda = \{v \in V \mid \forall h \in \mathfrak{h}\ h.v = \lambda(h)v\}$$

とする。このとき V の任意の部分加群 U は次数付きである。

証明. $v \in U$ に対して、$v = \sum_{i=1}^{s} v_i, v_i \in V_{\lambda_i}$ と表す。ここで $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathfrak{h}^*$ は互いに異なるとする。$v_i \in U$ を示せばよい。$h \in \mathfrak{h}$ を $\lambda_1(h), \dots, \lambda_s(h)$ が互いに異なり 0 でないものとする ($\mathfrak{h}$ から超平面 $(\lambda_i - \lambda_j)(h) = 0, \lambda_i(h) = 0$ を除いたものは空でないので、このような h は存在する)。このとき、任意の $k \in \{0, 1, \dots, s-1\}$ に対して

$$h^k(v) = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j(h)^k v_j \in U$$

となる。これは線形方程式系で、関連する行列は Vandermonde 行列なので可逆である。よって逆行列をかけることで、$v_j \in U$ が得られる。 □

Lie 代数 $\mathcal{L}$ の M **グラデーション**は、ベクトル空間としての M グラデーション $\mathcal{L} = \bigoplus_{\alpha\in M} \mathcal{L}_\alpha$ であって、任意の $\alpha, \beta \in M$ に対して $[\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\beta] \subseteq \mathcal{L}_{\alpha+\beta}$ をみたすものである。

1.5 普遍包絡代数と Poincaré-Birkhoff-Witt の定理

定義 1.11. Lie 代数 $\mathcal{L}$ の**普遍包絡代数** (UEA) とは、結合的代数 $\mathcal{A}$ および Lie 代数の射 $\iota\colon \mathcal{L} \to \mathcal{A}$ であって、次の普遍性を満たすものである：任意の結合的代数 $\mathcal{B}$ および Lie 代数の射 $\varphi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{B}$ に対して、$\widetilde{\varphi} \circ \iota = \varphi$ をみたす一意的な代数の射 $\widetilde{\varphi}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が存在する。

普遍包絡代数の存在はテンソル代数を用いて示すことができる。

命題 1.12. $\mathcal{L}$ の普遍包絡代数 $\mathcal{A}$ は同型を除いて一意的に存在する。

証明. $\mathcal{I}$ を $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ $(x, y \in \mathcal{L})$ により生成された $T(\mathcal{L})$ の両側イデアルとし、$\mathcal{A} = T(\mathcal{L})/\mathcal{I}$ とおく。$\mathcal{B}$ を結合的代数、$\varphi\colon \mathcal{L} \to \mathcal{B}$ を Lie 代数の射とする。$T(\mathcal{L})$ の普遍性より代数の射 $\varphi\colon T(\mathcal{L}) \to \mathcal{B}$ に拡張される。

$$\varphi(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x) - \varphi([x, y]) = 0$$

となるので、$\mathcal{I} \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$ となり、代数の射 $\widetilde{\varphi}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が得られる。一意性は $T(\mathcal{L})$ の普遍性から従う。よって $\mathcal{A}$ が存在する。

$\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ が普遍包絡代数のとき、一意性より

$$\varphi \circ \varphi' = \mathrm{id}_{\mathcal{A}'},\ \varphi' \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$$

となる。よって $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ は同型である。 □

以下、$\mathcal{A}$ を $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathcal{L})$ と表す。

Lie 代数の基底を用いて普遍包絡代数の構造を表すことができる。

定理 1.13 (Poincaré-Birkhoff-Witt)**.** $\mathcal{L}$ を Lie 代数、$\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathcal{L})$ を UEA、$\iota\colon \mathcal{L} \to \mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathcal{L})$ を標準的な線形写像とする。$\mathcal{B}$ を $\mathcal{L}$ のベクトル空間としての基底とし、$\mathcal{B}$ 上の全順序を 1 つとって固定する。このとき

$$\{y_1^{n_1} y_2^{n_2} \cdots y_s^{n_s} \mid s \in \mathbb{N}, n_1, \ldots, n_s \in \mathbb{N}^*, y_1, \ldots, y_s \in \mathcal{B}, y_1 < \cdots < y_s\}$$

は $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathcal{L})$ の基底である。

証明は [3] などを参照。

演習問題 1.14. $\iota\colon \mathcal{L} \to \mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathcal{L})$ が単射であることを示せ。

2 $\mathfrak{sl}_2$

この節では Lie 代数 $\mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ について扱う。具体例として重要であるのみならず、Kac-Moody 代数の理論においては非常に重要な役割を果たす Lie 代数である。

2.1 生成元

$\mathfrak{sl}_2$ の次の 3 つの元を考える。

$$H \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ E \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ F \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

このとき $\mathfrak{sl}_2$ は H, E, F により生成され、H, E, F は次の関係を満たす。

$$[H, E] = 2E,\ [H, F] = -2F,\ [E, F] = H.$$

演習問題 2.1. $\mathfrak{sl}_2$ は

$$\mathfrak{sl}_2 = \langle H, E, F \mid [H,E] = 2E,\ [H,F] = -2F,\ [E,F] = H \rangle$$

という表示を持つことを示せ。

2.2 普遍包絡代数上の等式

普遍包絡代数 $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{sl}_2)$ について調べる。

命題 2.2. $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{sl}_2)$ において以下の等式が成り立つ。ここで $s \in \mathbb{N}$ である。

$$[H, E^s] = 2sE^s,\ [H, F^s] = -2sF^s,\ [E, F^s] = sF^{s-1}H - s(s-1)F^{s-1}.$$

証明. $[H, E^s] = 2sE^s$ のみ示す。帰納法を用いる。$s = 1$ のとき成り立つ。s で成り立つとすると

$$\begin{aligned}
[H, E^{s+1}] &= HE^{s+1} - E^{s+1}H \\
&= (E^sH + 2sE^s)E - E^{s+1}H \\
&= E^s(EH + 2E) + 2sE^{s+1} - E^{s+1}H \\
&= 2(s+1)E^{s+1}
\end{aligned}$$

より、$s + 1$ でも成り立つ。 □

演習問題 2.3. 残りの 2 つの等式を示せ。

これより $\mathfrak{gl}(\mathfrak{sl}_2)$ において

$$[\mathrm{ad}(H), \mathrm{ad}(E)^s] = 2s\,\mathrm{ad}(E)^s$$

が成り立つことなどもいえる。

2.3 既約表現

$\mathfrak{sl}_2$ の表現 $\rho\colon \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{gl}(\mathbb{C}[x,y])$ を

$$\begin{aligned}
\rho(H) &= -x\partial_x + y\partial_y \\
\rho(E) &= y\partial_x \\
\rho(F) &= x\partial_y
\end{aligned}$$

により定める。$i = 0, 1, \ldots, n$ に対して $z_i = x^i y^{n-i}$ とおき、$z_0, z_1, \ldots, z_n$ の張る $\mathbb{C}[x,y]$ の部分空間を $V(n)$ とおくと、これは $(n+1)$ 次元不変部分空間となる。部分表現 $(\rho_n, V(n))$ を考える。

命題 2.4. $\mathfrak{sl}_2$ の表現 $(\rho_n, V(n))$ は既約である。

証明. W を $V(n)$ の不変部分空間とする。$\rho_n(h)(z_i) = (n-2i)z_i$ より z_i は $\rho_n(h)$ の固有値 $n - 2i$ に対する固有ベクトルである。ゆえに $\rho_n(h)$ は対角化可能であり、最小多項式は相異なる 1 次式の積となる。$\rho_n(h)|_W$ の最小多項式は $\rho_n(h)$ の最小多項式を割り切るので、$\rho_n(h)|_W$ も対角化可能である。ゆえにある $I \subseteq \{0, \ldots, n\}$ に対して、$\{z_i \mid i \in I\}$ が W の基底となる。ここで $i \in I, i \neq 0$ ならば $\rho(e)(z_i) = iz_{i-1} \in W$ より $i - 1 \in I$ となり、$i \in I, i \neq n$ ならば $\rho(f)(z_i) = (n-i)z_{i+1} \in W$ より $i + 1 \in I$ となる。よって I は $\emptyset$ または $\{0, \ldots, n\}$ なので、W は 0 または $V(n)$ となる。したがって $(\rho_n, V(n))$ は既約表現である。 □

次に $\mathfrak{sl}_2$ の有限次元既約表現は上で定義した $V(n)$ のいずれかと同型であることを示す。

(書く)

最後に、$\mathfrak{sl}_2$ の有限次元表現は完全可約である。これは Weyl の定理から従うが、初等的に示すこともできる ([3] または [6] を参照)。

3 Kac-Moody 代数

いよいよ本題である Kac-Moody 代数の定義に入っていく。Kac-Moody 代数の理論は有限次元半単純 Lie 代数の理論に由来するため、それらの理論を知っている方がこの先扱う内容を理解しやすい。ただし必須ではないので、半単純 Lie 代数の理論を知らなくても読めると思う。逆に Kac-Moody 代数を学んでから具体例として半単純 Lie 代数に触れるのもよいだろう。

3.1 一般 Cartan 行列

$I = \{1, \ldots, n\}$ を添字集合とする。

定義 3.1. $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ が**一般 Cartan 行列** (GCM) であるとは、次の 3 条件を満たすことをいう。

(1) $a_{ii} = 2 \quad (i \in I)$.

(2) $i \neq j$ ならば $a_{ij} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

(3) $a_{ij} = 0 \iff a_{ji} = 0$.

目標は、一般 Cartan 行列 A に対して Lie 代数 $\mathfrak{g}(A)$ を対応させることである。

3.2 実現

定義 3.2. A を $n \times n$ 複素行列とする。A の**実現**とは 3 つ組 $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ であって、$\mathfrak{h}$ はベクトル空間、$\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ は双対空間 $\mathfrak{h}^*$ の部分集合、$\Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_n^\vee\}$ は $\mathfrak{h}$ の部分集合であり、次の条件を満たすものである。

(1) $\Pi, \Pi^\vee$ はともに線形独立。

(2) $\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = a_{ij}$ $(i, j \in I)$.

(3) A のランクを l とするとき、$\mathfrak{h}$ の次元は $2n - l$ である。

演習問題 3.3. $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ が上の条件の (1),(2) をみたすとする。このとき $\dim \mathfrak{h} \geq 2n - l$ であることを示せ。

A の実現は常に存在することを見る。必要ならば添字の順番を入れ替えて

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$

かつ A_1 は $l \times l$ 可逆行列とする (ここで l は A のランクである)。このとき

$$B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & 0 \\ A_3 & A_4 & I_{n-l} \\ 0 & I_{n-l} & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと、これは $(2n - l) \times (2n - l)$ 可逆行列である。よって、$\mathfrak{h} := \mathbb{C}^{2n-l}$ の基底 $\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_{2n-l}^\vee$ と $\mathfrak{h}^*$ の基

底 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n-l}$ であって $\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = b_{ij}$ をみたすものが存在する。$\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}, \Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_n^\vee\}$ とすれば、$(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ は A の実現である。

演習問題 3.4. A の実現は同型を除いて一意的であることを示せ。ここで 2 つの A の実現 $(\mathfrak{h}_1, \Pi_1, \Pi_1^\vee), (\mathfrak{h}_2, \Pi_2, \Pi_2^\vee)$ が同型であるとは、線形同型 $\varphi\colon \mathfrak{h}_1 \to \mathfrak{h}_2$ であって $\varphi(\Pi_1^\vee) = \Pi_2^\vee, \varphi^*(\Pi_2) = \Pi_1$ となるものが存在することをいう。

Π を**ルート基底**、$\Pi^\vee$ を**余ルート基底**といい、Π の元を**単純ルート**、$\Pi^\vee$ の元を**単純余ルート**という。

$$Q \coloneqq \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\alpha_i$$

を**ルート格子**という。

$$Q_+ \coloneqq \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{N}\alpha_i, \quad Q_- \coloneqq -Q_+$$

とする。$\alpha \in Q$ に対して $\alpha = \sum k_i \alpha_i$ と表したとき、$\mathrm{ht}(\alpha) = \sum k_i$ を α の**高さ**という。

3.3 Lie 代数 $\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$

$\mathfrak{g}(A)$ を定義する前段階として $\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ を定義する。

定義 3.5. $A = (a_{ij})$ を $n \times n$ 複素行列、$(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ を A の実現とする。$\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ を e_i, f_i, h $(i \in I, h \in \mathfrak{h})$ を生成元とし、次を関係式とする Lie 代数とする。

$$\begin{cases} [e_i, f_j] = \delta_{ij}\alpha_i^\vee & (i, j \in I), \\ [h, h'] = 0 & (h, h' \in \mathfrak{h}), \\ [h, e_i] = \langle \alpha_i, h \rangle e_i & (i \in I, h \in \mathfrak{h}), \\ [h, f_i] = -\langle \alpha_i, h \rangle f_i & (i \in I, h \in \mathfrak{h}). \end{cases}$$

$\widetilde{\mathfrak{n}}^+$ を $e_1, \ldots, e_n$ により生成された $\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ の部分代数、$\widetilde{\mathfrak{n}}^-$ を $f_1, \ldots, f_n$ により生成された $\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ の部分代数とする。

Lie 代数 $\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ の構造は次の命題により記述される。

命題 3.6. Lie 代数 $\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ に関して次が成り立つ。

(1) $\widetilde{\mathfrak{n}}^+$ (resp. $\widetilde{\mathfrak{n}}^-$) は $e_1, \ldots, e_n$ (resp. $f_1, \ldots, f_n$) により自由生成される。

(2) ベクトル空間としての直和分解
$$\widetilde{\mathfrak{g}}(A) = \widetilde{\mathfrak{n}}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \widetilde{\mathfrak{n}}^+$$
が成り立つ。

(3) $\mathfrak{h}$ に関してルート空間分解
$$\widetilde{\mathfrak{g}}(A) = \left(\bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_+ \\ \alpha \neq 0}} \widetilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha} \right) \oplus \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_+ \\ \alpha \neq 0}} \widetilde{\mathfrak{g}}_{\alpha} \right)$$
が成り立つ。ここで $\widetilde{\mathfrak{g}}_\alpha \coloneqq \{x \in \widetilde{\mathfrak{g}}(A) \mid \forall h \in \mathfrak{h}\ [h, x] = \alpha(h)x\}$ である。

(4) $\widetilde{\mathfrak{g}}_\alpha$ は $\alpha \in Q_+$ (resp. $\alpha \in Q_-$) に対して、$\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_s} = \alpha$ (resp. $= -\alpha$) をみたす $i_1, \ldots, i_s$ に関する $[e_{i_1}, \ldots, e_{i_s}]$ (resp. $[f_{i_1}, \ldots, f_{i_s}]$) により張られる部分空間である。

証明のために準備をする。

補題 3.7. $e_i \mapsto f_i, f_i \mapsto e_i, h \mapsto -h$ $(i \in I, h \in \mathfrak{h})$ は $\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ の対合 (位数 2 の自己同型) $\widetilde{\omega}$ へ一意的に拡張される。

証明. $e_i \mapsto f_i, f_i \mapsto e_i, h \mapsto -h$ は関係式を保つので準同型 $\widetilde{\omega}\colon \widetilde{\mathfrak{g}}(A) \to \widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ が得られる。$\widetilde{\omega}^2$ は恒等写像なので対合である。 □

$\mathfrak{F}$ を e_i, f_i, h $(i \in I, h \in \mathfrak{h})$ を生成元とする自由 Lie 代数とし、$\pi\colon \mathfrak{F} \to \widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ を標準的な商写像とする。V を n 次元複素ベクトル空間とし、基底 $v_1, \ldots, v_n$ をとる。$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対してテンソル代数 $T(V)$ 上の表現 $\overline{\rho}_\lambda\colon \widetilde{\mathfrak{g}}(A) \to \mathfrak{gl}(T(V))$ を定めたい。

そのために、$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\mathfrak{F}$ のテンソル代数 $T(V)$ 上の表現 $\rho_\lambda\colon \mathfrak{F} \to \mathfrak{gl}(T(V))$ を定める。まず $i \in I, h \in \mathfrak{h}, v \in V$ に対して
$$\rho_\lambda(e_i)1 = 0, \quad \rho_\lambda(h)1 = \lambda(h)1, \quad \rho_\lambda(f_i)v = v_i \otimes v$$
とする。このとき $i \in I, h \in \mathfrak{h}, a \in T^s(V) = V^{\otimes s}$ に対して
$$\begin{aligned} \rho_\lambda(h)(v_j \otimes a) &= \rho_\lambda(h)\rho_\lambda(f_j)(a) \\ &= \rho_\lambda(-\alpha_j(h)f_j)(a) + \rho_\lambda(f_j)\rho_\lambda(h)(a) \\ &= -\alpha_j(h)v_j \otimes a + v_j \otimes \rho_\lambda(h)(a), \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \rho_\lambda(e_i)(v_j \otimes a) &= \rho_\lambda(e_i)\rho_\lambda(f_j)(a) \\ &= \rho_\lambda(\delta_{ij}\alpha_i^\vee)(a) + \rho_\lambda(f_j)\rho_\lambda(e_i)(a) \\ &= \delta_{ij}\rho_\lambda(\alpha_i^\vee)(a) + v_j \otimes \rho_\lambda(e_i)(a) \end{aligned}$$
により ρ_λ を帰納的に定める。

演習問題 3.8. $\rho_\lambda(h)(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_k})$ を計算せよ。

$\rho_\lambda(\ker \pi) = \{0\}$ が確かめられるので、$\widetilde{\mathfrak{g}}(A) = \mathfrak{F}/\ker \pi$ の表現 $\overline{\rho}_\lambda\colon \widetilde{\mathfrak{g}}(A) \to \mathfrak{gl}(T(V))$ であって $\rho_\lambda = \overline{\rho}_\lambda \circ \pi$ をみたすものが誘導される。

演習問題 3.9. $\rho_\lambda(\ker\pi)=\{0\}$ を確かめよ。

この表現を用いて命題を証明する。

証明 (命題 3.6). (1) Lie 代数の射 $\varphi\colon\widetilde{\mathfrak{n}}^-\to T(V), x\mapsto\overline{\rho}_\lambda(x)1$ を考える。$\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\widetilde{\mathfrak{n}}^-)$ の普遍性より、代数の射 $\widetilde{\varphi}\colon\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\widetilde{n}^-)\to T(V)$ であって、$\widetilde{\varphi}\circ\iota=\varphi$ をみたすものが存在する。$\widetilde{\varphi}$ は f_i を v_i に移す。一方 $T(V)$ は $v_1,\dots,v_n$ により生成された自由結合的代数なので、普遍性より $\widetilde{\varphi}$ は逆写像をもつ。よって $\widetilde{\varphi}$ は同型である。$\mathcal{U}_{\mathbb{C}}(\widetilde{\mathfrak{n}}^-)$ は自由結合的代数となり、PBW より $\widetilde{\mathfrak{n}}^-$ は自由 Lie 代数となる。すなわち $\widetilde{\mathfrak{n}}^-$ は $f_1,\dots,f_n$ により自由生成される。$\widetilde{\omega}$ を用いて $\widetilde{\mathfrak{n}}^+$ についての主張もいえる。

(2) まず $\widetilde{\mathfrak{g}}(A)=\widetilde{\mathfrak{n}}^-+\mathfrak{h}+\widetilde{\mathfrak{n}}^+$ を示す。$\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ は $[x_1,\dots,x_s]$ $(x_j\in\{e_i,f_i\mid i\in I\}\cup\mathfrak{h})$ により張られるので、$[x_1,\dots,x_s]\in\widetilde{\mathfrak{n}}^-+\mathfrak{h}+\widetilde{\mathfrak{n}}^+$ を示せばよい。これは関係式から $[x,\widetilde{\mathfrak{n}}^-+\mathfrak{h}+\widetilde{\mathfrak{n}}^+]\subseteq\widetilde{\mathfrak{n}}^-+\mathfrak{h}+\widetilde{\mathfrak{n}}^+$ が成り立つことからわかる。

また、$\widetilde{\mathfrak{n}}^+$ は $[e_{i_1},\dots,e_{i_s}]$ により張られ、$[h,e_i]=\alpha_i(h)e_i$ より $[e_{i_1},\dots,e_{i_s}]\in\widetilde{\mathfrak{g}}_{\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_s}}$ が成り立つ。$\widetilde{\mathfrak{n}}^-$ も同様。よって

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathfrak{g}}(A)&=\widetilde{\mathfrak{n}}^-+\mathfrak{h}+\widetilde{\mathfrak{n}}^+\\&=\sum\mathbb{C}[f_{i_1},\dots,f_{i_s}]+\mathfrak{h}+\sum\mathbb{C}[e_{i_1},\dots,e_{i_s}]\\&\subseteq\left(\bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_+\\\alpha\neq0}}\widetilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha}\right)\oplus\mathfrak{h}\oplus\left(\bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_+\\\alpha\neq0}}\widetilde{\mathfrak{g}}_{\alpha}\right)\\&\subseteq\widetilde{\mathfrak{g}}(A)\end{aligned}$$

となる。ゆえに

$$\widetilde{\mathfrak{g}}(A)=\left(\bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_+\\\alpha\neq0}}\widetilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha}\right)\oplus\mathfrak{h}\oplus\left(\bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_+\\\alpha\neq0}}\widetilde{\mathfrak{g}}_{\alpha}\right)$$

となる。また、$\widetilde{\mathfrak{n}}^\pm=\bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_+\\\alpha\neq0}}\widetilde{\mathfrak{g}}_{\pm\alpha}$ であるから、$\widetilde{\mathfrak{g}}(A)=\widetilde{\mathfrak{n}}^-\oplus\mathfrak{h}\oplus\widetilde{\mathfrak{n}}^+$ を得る。

(3) (4) 上で示した。

□

以上より、分解

$$\widetilde{\mathfrak{g}}(A)=\bigoplus_{\alpha\in Q}\widetilde{\mathfrak{g}}_\alpha$$

が得られる。これは Q グラデーションである。

3.4 Kac-Moody 代数 $\mathfrak{g}(A)$

$\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ のイデアルについて議論する。

命題 3.10. $\mathfrak{h}$ との交わりが自明な $\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ のイデアルのうち極大なもの $\mathfrak{i}$ が存在する。さらに $\mathfrak{i}=(\mathfrak{i}\cap\widetilde{\mathfrak{n}}^-)\oplus(\mathfrak{i}\cap\widetilde{\mathfrak{n}}^+)$ (イデアルの直和) が成り立つ。

証明. $\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ のイデアル $\mathfrak{i}$ は Q グラデーションに関して次数付きなので

$$\mathfrak{i} = \bigoplus_{\alpha\in Q}(\mathfrak{i}\cap\widetilde{\mathfrak{g}}_\alpha)$$

をみたす。特に $\mathfrak{i}$ と $\mathfrak{h}$ の交わりが自明なとき、$\mathfrak{i} = (\mathfrak{i}\cap\widetilde{\mathfrak{n}}^-)\oplus(\mathfrak{i}\cap\widetilde{\mathfrak{n}}^+) \subseteq \widetilde{\mathfrak{n}}^-\oplus\widetilde{\mathfrak{n}}^+$ なので、$\mathfrak{h}$ との交わりが自明なイデアルの和も $\mathfrak{h}$ との交わりが自明である。よって $\mathfrak{h}$ との交わりが自明な極大イデアル $\mathfrak{i}$ が存在する。

$$[f_i, \mathfrak{i}\cap\widetilde{\mathfrak{n}}^+] \subseteq \mathfrak{i}\cap(\mathfrak{h}+\widetilde{\mathfrak{n}}^+) = \mathfrak{i}\cap\widetilde{\mathfrak{n}}^+$$

より $\mathfrak{i}\cap\widetilde{\mathfrak{n}}^+$ はイデアルである。同様に $\mathfrak{i}\cap\widetilde{\mathfrak{n}}^-$ もイデアルなので、$\mathfrak{i} = (\mathfrak{i}\cap\widetilde{\mathfrak{n}}^-)\oplus(\mathfrak{i}\cap\widetilde{\mathfrak{n}}^+)$ (イデアルの直和) が成り立つ。 □

このイデアル $\mathfrak{i}$ の元について考える。

補題 3.11. $x\in\widetilde{\mathfrak{n}}^+$ が任意の $i\in I$ に対して $[f_i, x] = 0$ をみたすならば、$x\in\mathfrak{i}$ となる。同様に $x\in\widetilde{\mathfrak{n}}^-$ が任意の $i\in I$ に対して $[e_i, x] = 0$ をみたすならば、$x\in\mathfrak{i}$ となる。

証明. $x\in\widetilde{\mathfrak{n}}^+$ に対して、$[h, x], [e_i, x]\in\widetilde{\mathfrak{n}}^+$ $(h\in\mathfrak{h}, i\in I)$ が成り立つ。任意の $i\in I$ に対して $[f_i, x] = 0$ をみたすとすると、x により生成されるイデアルは $\widetilde{\mathfrak{n}}^+$ に含まれる。特に $\mathfrak{h}$ との交わりが自明なので、$x\in\mathfrak{i}$ となる。 □

補題 3.12. A は GCM とする。このとき $\mathfrak{i}$ は次の形の元を含む。

$$x_{ij}^+ := (\mathrm{ad}\, e_i)^{1-a_{ij}}e_j,\ x_{ij}^- := (\mathrm{ad}\, f_i)^{1-a_{ij}}f_j \quad (1\le i\ne j\le n)$$

証明. $i\ne j$ を固定し、$x_{ij}^-\in\mathfrak{i}$ を示す。補題 3.11 より任意の $k\in I$ に対して $[e_k, x_{ij}^-] = 0$ を示せばよい。$k\ne i, j$ のときは明らか。$k = j, a_{ij} = 0$ のとき、GCM の定義より $a_{ji} = 0$ となり

$$[e_k, x_{ij}^-] = [e_j, [f_i, f_j]] = [f_i, \alpha_j^\vee] = a_{ji}f_i = 0$$

となる。$k = j, a_{ij}\le -1$ のとき、命題 3.6(4) より

$$[e_k, x_{ij}^-] \in \widetilde{\mathfrak{g}}_{(a_{ij}-1)\alpha_i} = \{0\}$$

となる。最後に $k = i$ とする。$\mathfrak{g}_{(i)} := \langle e_i, f_i, \alpha_i^\vee\rangle$ は $\mathfrak{sl}_2$ と同型である。命題 2.2 より $s = 1 - a_{ij}$ とおくと

$$\begin{aligned}
[e_i, x_{ij}^-] &= (\mathrm{ad}\, e_i)(\mathrm{ad}\, f_i)^s f_j \\
&= [\mathrm{ad}\, e_i, \mathrm{ad}\, f_i^s]f_j \\
&= \mathrm{ad}[e_i, f_i^s]f_j \\
&= s(s-1)(\mathrm{ad}\, f_i)^{s-1}f_j - s(\mathrm{ad}\, f_i)^{s-1}(\mathrm{ad}\,\alpha_i^\vee)f_j \\
&= s(s-1+a_{ij})(\mathrm{ad}\, f_i)^{s-1}f_j \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる。 □

定義 3.13. A を GCM、$(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ を A の実現とする。GCM A をもつ **Kac-Moody 代数**は、$\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ を次の関係式で割って得られる商 Lie 代数 $\mathfrak{g}(A)$ である。

$$\begin{cases} (\mathrm{ad}\, e_i)^{1-a_{ij}} e_j = 0, \\ (\mathrm{ad}\, f_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0 \end{cases} \qquad (1 \leq i \neq j \leq n).$$

$e_i, f_i, \mathfrak{h}$ の $\mathfrak{g}(A)$ における像も同じ記号で表す。$\mathfrak{g}(A)$ の部分代数 $\mathfrak{h}$ を **Cartan 部分代数**という。e_i, f_i $(i \in I)$ を **Chevalley 生成元**という。

定義 3.14. $\alpha \in Q$ が**ルート**であるとは、$\alpha \neq 0$ かつ $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$ をみたすことをいう。ルートの集合を Δ と表す。

$\mathfrak{g}(A)$ の中心について調べる。

命題 3.15. $\mathfrak{g}(A)$ の中心は

$$\mathcal{Z} \coloneqq \{h \in \mathfrak{h} \mid \forall i \in I\ \alpha_i(h) = 0\}$$

に等しい。これは

$$\mathfrak{h}' = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{C}\alpha_i^\vee$$

に含まれ、次元は $n - l$ である (l は A のランク)。

証明. c を中心の元とし、$c = \sum_{\alpha \in Q} c_\alpha$ $(c_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha)$ とする。任意の $i \in I$ に対して、$0 = [f_i, c] = \sum_{\alpha \in Q} [f_i, c_\alpha]$ となり、$[f_i, c_\alpha] \in \mathfrak{g}_{\alpha - \alpha_i}$ より $[f_i, c_\alpha] = 0$ となる。補題 3.11 より $\alpha > 0$ ならば $c_\alpha = 0$ となる。同様に $[e_i, c]$ を考えることで、$\alpha < 0$ ならば $c_\alpha = 0$ となることがわかる。よって $c \in \mathfrak{h}$ である。これより $[c, e_i] = \alpha_i(c) e_i = 0$ となるので、$c \in \mathcal{Z}$ となる。逆に $\mathcal{Z}$ の元は Chevalley 生成元と交換するので中心の元である。以上より中心が $\mathcal{Z}$ に等しいことが得られた。特に

$$\alpha_i \in \mathcal{Z}^\perp = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \forall h \in \mathcal{Z}\ \alpha(h) = 0\}$$

である。Π は線形独立なので、$\mathcal{Z}^\perp$ の次元は n 以上である。これより $\mathcal{Z}$ の次元は $n - l$ 以下である。一方、$h = \sum_i c_i \alpha_i^\vee \in \mathcal{Z} \cap \mathfrak{h}'$ とすると、$(c_1\ \cdots\ c_n) A = 0$ をみたすので、$\mathcal{Z} \cap \mathfrak{h}'$ の次元は $n - l$ である。よって $\mathcal{Z} \subseteq \mathfrak{h}'$ で、$\dim \mathcal{Z} = n - l$ である。 □

3.5 対称化可能性と Gabber-Kac の定理

[1] では、$\widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ をイデアル $\mathfrak{i}$ で割った商を Kac-Moody 代数と定義している。この Lie 代数を

$$\mathfrak{g}(A)_{\mathrm{Kac}} \coloneqq \widetilde{\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{i}$$

と表す。補題 3.12 より、$\mathfrak{g}(A)_{\mathrm{Kac}}$ は $\mathfrak{g}(A)$ の商である。A が対称化可能と呼ばれる条件を満たす場合 $\mathfrak{g}(A)$ と $\mathfrak{g}(A)_{\mathrm{Kac}}$ は一致することが知られている。一般の場合は未解決である。

定義 3.16. A が**対称化可能**であるとは、ある可逆対角行列 D と対称行列 B が存在して $A = DB$ となることをいう。

定理 3.17 (Gabber-Kac)**.** GCM A が対称化可能ならば、$\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{g}(A)_{\mathrm{Kac}}$.

この定理の証明は省略する。

4　標準不変双線形形式

A が対称化可能な GCM のとき、$\mathfrak{g}(A)$ 上に非自明な不変双線形形式が存在する。以下、A は分解不能 GCM とする。

定義 4.1. A を GCM とする。双線形形式 $(\cdot,\cdot)\colon \mathfrak{g}(A)\times\mathfrak{g}(A)\to\mathbb{C}$ が**不変**であるとは、任意の $x,y,z\in\mathfrak{g}(A)$ に対して

$$([x,y],z)=(x,[y,z])$$

が成り立つことをいう。

A を対称化可能 GCM とすると、可逆対角行列 $D=\mathrm{diag}(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ および対称行列 B であって $A=DB$ となるものが存在する。$N\in\mathbb{N}$ に対して

$$\mathfrak{g}(N)\coloneqq\bigoplus_{s=-N}^{N}\mathfrak{g}_s,\quad \mathfrak{g}_s\coloneqq\bigoplus_{\alpha\in Q,\mathrm{ht}(\alpha)=s}\mathfrak{g}_\alpha$$

とする。まず $\mathfrak{g}(0)=\mathfrak{h}$ 上の双線形形式 $(\cdot,\cdot)$ を定める。そのために $\mathfrak{h}$ における $\mathfrak{h}'=\sum_{i=1}^n\mathbb{C}\alpha_i^\vee$ の補空間 $\mathfrak{h}''$ を 1 つとり

$$(\alpha_i^\vee,h)=(h,\alpha_i^\vee)=\varepsilon_i\alpha_i(h)\quad(i\in I,h\in\mathfrak{h}),$$

$$(h,h')=0\quad(h,h'\in\mathfrak{h}'')$$

と定める。対称化可能性よりこれは well-defined である。

補題 4.2. 双線形形式 $(\cdot,\cdot)$ は $\mathfrak{h}$ 上非退化である。

証明. $h_0\in\mathfrak{h}$ が任意の $h\in\mathfrak{h}$ に対して $(h_0,h)=0$ をみたすとすると、任意の $i\in I$ に対して $\alpha_i(h_0)=0$ となるので $h_0\in\mathcal{Z}$ である。$\mathcal{Z}\subseteq\mathfrak{h}'$ より $h_0=\sum_{i=1}^n c_i\alpha_i^\vee$ と表せるので

$$0=(\sum_{i=1}^n c_i\alpha_i^\vee,h)=\sum_{i=1}^n c_i\varepsilon_i\alpha_i(h)$$

となる。これより $\sum_{i=1}^n c_i\varepsilon_i\alpha_i=0$ となり、$\Pi=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ は線形独立なので $c_i=0$ を得る。よって $h_0=0$ である。 □

次に、$\mathfrak{g}(1)$ 上に $(\cdot,\cdot)$ を延長する。

$$(e_i,f_j)=\delta_{ij}\varepsilon_i,\ (\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_{\pm1})=(\mathfrak{g}_{\pm1},\mathfrak{g}_{\pm1})=0$$

とする。これは $x,y,z\in\mathfrak{g}(1)$ が $[x,y],[y,z]\in\mathfrak{g}(1)$ をみたす限り不変性を満たす ($([e_i,f_j],h)=(e_i,[f_j,h])$ を確かめればよい)。

$N\geq1$ に関して帰納的に $(\cdot,\cdot)$ を $\mathfrak{g}(N)$ 上に延長する。$|i|,|j|\leq N,i+j\neq0$ のとき $(\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_j)=0$ とする。$(\cdot,\cdot)$ は仮定より $\mathfrak{g}(N-1)$ 上定義されているので、$x\in\mathfrak{g}_{\pm N},y\in\mathfrak{g}_{\mp N}$ に対して (x,y) を定めればよい。$y=\sum_i[u_i,v_i]$ $(u_i,v_i\in\mathfrak{g}(N-1))$ と表す。このとき $[x,u_i]\in\mathfrak{g}(N-1)$ である。

$$(x,y)\coloneqq\sum_i([x,u_i],v_i)$$

と定める。この定義より、$x,y,z \in \mathfrak{g}(N)$ が $[x,y],[y,z] \in \mathfrak{g}(N)$ をみたすとき不変性が満たされる。この定義が well-defined であることは、$x = \sum_j [u'_j, v'_j]$ $(u'_j, v'_j \in \mathfrak{g}(N-1))$ と表したとき不変性と Jacobi identity から

$$(x,y) = \sum_j (u'_j, [v'_j, y])$$

となることからわかる。

演習問題 4.3. well-defined であることを確かめよ。

このようにして $\mathfrak{g}(A)$ 上に非自明な不変双線形形式 $(\cdot,\cdot)$ が定義される。

補題 4.2 より、線形同型 $\mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h} : \alpha \mapsto \alpha^\#$ が誘導される。すなわち、$\alpha \in \mathfrak{h}^*, h \in \mathfrak{h}$ に対して $(\alpha^\#, h) = \alpha(h)$ とする。

命題 4.4. $\alpha \in \Delta, x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ に対して、$[x,y] = (x,y)\alpha^\#$ が成り立つ。

証明. 任意の $h \in \mathfrak{h}$ に対して

$$([x,y],h) = (x,[y,h]) = \alpha(h)(x,y) = (\alpha^\#,h)(x,y) = ((x,y)\alpha^\#, h)$$

が成り立つ。 □

命題 4.5. (1) $(\cdot,\cdot)$ は対称非退化不変双線形形式である。

(2) $(\cdot,\cdot)$ の $\mathfrak{h}$ への制限は非退化である。

(3) $\alpha, \beta \in Q$ が $\alpha + \beta \neq 0$ をみたすならば、$(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$.

(4) $\alpha \in \Delta$ に対して $(\cdot,\cdot)|_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}}$ は非退化である。

証明. (1) 対称性は上の命題と (3)(4) から。不変性は構成から。非退化性については、$\mathcal{I}$ を双線形形式の核とすると $\mathcal{I} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$ であることから $\mathcal{I} = \{0\}$ となる。

(2) 補題 4.2 の通り。

(3) $x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_\beta$ に対して

$$\alpha(h)(x,y) = ([h,x],y) = -(x,[h,y]) = -\beta(h)(x,y)$$

となる。よって $\alpha + \beta \neq 0$ とすると、$(\alpha+\beta)(h) \neq 0$ となる $h \in \mathfrak{h}$ が存在するので $(x,y) = 0$ となる。

(4) (2)(3) より。

□

逆に、$\mathfrak{g}(A)$ は非自明な不変双線形形式 $(\cdot,\cdot)$ をもつとする。上と同様に、$\alpha + \beta \neq 0$ ならば $(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$ であることがわかる。もしある i に対して $(e_i, f_i) = 0$ となったとすると、$e_i \in \mathcal{R} = \{x \in \mathfrak{g}(A) \mid \forall y \in \mathfrak{g}(A)\ (x,y) = 0\}$ となる。$\mathcal{R}$ は不変性よりイデアルなので $e_i, f_i, \alpha_i^\vee \in \mathcal{R}$ となる。ディンキン図形において i と結ばれている頂点 j をとると、$\alpha_j(\alpha_i^\vee) \neq 0$ となり、$[\alpha_i^\vee, e_j] = \alpha_j(\alpha_i^\vee)e_j \neq 0$ より $e_j \in \mathcal{R}$ を得る。A は分解不能なので、すべての $j \in I$ に対して $e_j, f_j, \alpha_j^\vee \in \mathcal{R}$ を得る。これは非自明性に反する。

よって任意の $i \in I$ に対して $\varepsilon_i \coloneqq (e_i, f_i) \neq 0$ である。$h \in \mathfrak{h}$ に対して

$$(\alpha_i^\vee, h) = ([e_i,f_i],h) = (e_i,[f_i,h]) = \alpha_i(h)(e_i,f_i) = \varepsilon_i\alpha_i(h)$$

$$(h, \alpha_j^\vee) = (h,[e_j,f_j]) = ([h,e_j],f_j) = \alpha_j(h)(e_j,f_j) = \varepsilon_j\alpha_j(h)$$

となる。特に

$$\varepsilon_i a_{ji} = \varepsilon\alpha_i(\alpha_j^\vee) = (\alpha_i^\vee, \alpha_j^\vee) = \varepsilon_j\alpha_j(\alpha_i^\vee) = \varepsilon_j a_{ij}$$

となる。よって、$D = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), B = (b_{ij}), b_{ij} = a_{ij}/\varepsilon_i$ とおくと、D は可逆対角行列、B は対称行列、$A = DB$ となる。したがって非自明な不変双線形形式が存在するような GCM A は対称化可能なものに限られることが分かった。

命題 4.6. A を GCM とする。このとき A が対称化可能であることと $\mathfrak{g}(A)$ 上に非自明な不変双線形形式が存在することは同値である。

定義 4.7. A を対称化可能 GCM とし、$(\cdot,\cdot)$ を非退化対称不変双線形形式とする。これを $\mathfrak{g}(A)$ 上の標準不変形式という。同一視 $\mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h} : \alpha \mapsto \alpha^\#$ により $\mathfrak{h}^*$ 上の双線形形式を定める。すなわち

$$(\alpha, \beta) \coloneqq (\alpha^\#, \beta^\#) \quad (\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*)$$

とする。

命題 4.8. (1)

$$A = \left(\frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}\right)_{i,j}$$

が成り立つ。

(2) $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して

$$\lambda(\alpha_i^\vee) = \frac{2(\lambda, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$$

が成り立つ。

証明. $\alpha_i^\vee = [e_i, f_i] = (e_i, f_i)\alpha_i^\# = \varepsilon_i\alpha_i^\#$ より

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \frac{a_{ij}}{\varepsilon_i} = b_{ij}$$

$$\alpha_i^\vee = \frac{2\alpha_i^\#}{(\alpha_i, \alpha_i)}$$

となる。これより

$$a_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$$

である。(2) は (1) から従う。 □

5 Weyl 群

$I = \{1, 2, \ldots, n\}$ を添字集合、$A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ を GCM、$(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ を A の実現とする。

5.1 可積分加群

$\mathfrak{g}_{(i)} \coloneqq \mathbb{C}f_i \oplus \mathbb{C}\alpha_i^\vee \oplus \mathbb{C}e_i$ は $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ と同型である。ベクトル空間 V 上の線形作用素 x が**局所有限**であるとは、任意の $v \in V$ に対し $v \in W$ かつ $xW \subseteq W$ となる有限次元部分空間 $W \subseteq V$ が存在することをいう。さらに $x|_W$ が冪零となるとき、x は**局所冪零**という。x が局所冪零というのは、任意の $v \in V$ に対しあ

る $N \in \mathbb{N}$ が存在して $x^N(v) = 0$ となることといっても同じである。$\mathfrak{g}(A)$ 加群 V が $\mathfrak{h}$ **対角化可能**であるとは、$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$ となること。ここで $V_\lambda \coloneqq \{v \in V \mid \forall h \in \mathfrak{h}, hv = \langle \lambda, h \rangle v\}$ である。V_λ を**ウェイト空間**、$V_\lambda \neq \{0\}$ のとき λ を**ウェイト**、$\mathrm{mult}_V(\lambda) \coloneqq \dim V_\lambda$ を λ の**重複度**という。$\mathfrak{h}$ 対角化可能 $\mathfrak{g}(A)$ 加群が**可積分**であるとは、すべての e_i, f_i $(i \in I)$ が V 上局所冪零となることである。

補題 5.1. $\mathfrak{g}(A)$ は (随伴表現について) 可積分 $\mathfrak{g}(A)$ 加群である。

証明. $\mathrm{ad}\, e_i, \mathrm{ad}\, f_i$ が局所冪零であることを示せばよい。定義関係式より、$x \in \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_1$ に対してある N が存在して $(\mathrm{ad}\, e_i)^N x = (\mathrm{ad}\, f_i)^N x = 0$ となる。Leibniz の公式

$$(\mathrm{ad}\, x)^k [y, z] = \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} [(\mathrm{ad}\, x)^s y, (\mathrm{ad}\, x)^{k-s} z] \quad (x, y, z \in \mathcal{L}, k \in \mathbb{N})$$

を用いると、帰納法により $\mathfrak{g}(A)$ 上で局所冪零であることがわかる。 □

演習問題 5.2. Leibniz の公式を証明せよ。

(執筆中)

参考文献

[1] Victor G. Kac, Infinite Dimensional Lie Algebras. Cambridge University Press. 1983.

[2] Timothée Marquis, An Introduction to Kac-Moody Groups over Fields. European Mathematical Society. 2018.

[3] 谷崎俊之, リー代数と量子群, 共立出版, 2002.

[4] 森田純, Kac-Moody 群講義, 上智大学数学講究録, 2001.

[5] 斎藤毅, 線形代数の世界, 東京大学出版会, 2014.

[6] 池田岳, テンソル代数と表現論　線型代数続論, 東京大学出版会, 2022.