Bruhat 分解と Birkhoff 分解

箱星

2024 年 9 月 10 日

目次

1 Tits 系と Bruhat 分解

定義 1. (G, B, N, S) が **Tits 系**であるとは

1. G は群、B, N は G の部分群、$T := B \cap N$ とおくと S は N/T の部分集合
2. $G = \langle B, N \rangle$
3. T は N の正規部分群であり、$W := N/T$ とおくと $W = \langle S \rangle$ である。さらに S の元の位数は 2
4. 任意の $s \in S, w \in W$ に対して $sBw \subseteq BwB \cup BswB$
5. 任意の $s \in S$ に対して $sBs \not\subset B$

をみたすことをいう。W を **Weyl 群**という。

ここで $w \in W = N/T$ に対して Bw や wB が well-defined であることに注意する。

Tits 系の例を与える。$G = SL_n(\mathbb{C})$ とし、B を上三角行列全体、N をモノミアル行列（各行・各列に 0 でない成分がただ 1 つの行列）全体からなる部分群とする。$T = B \cap N$ は対角行列全体となる。$W = N/T$ は対称群 S_n と同型である。$S = \{(1, 2), (2, 3), \ldots, (n-1, n)\}$ とおく。このとき (G, B, N, S) は Tits 系となる。

Weyl 群の元 w は、$w = s_1 \cdots s_l$ $(s_i \in S)$ の形で表せる。このように表したときの l の最小値を w の**長さ**といい、$\ell(w) = l$ と表す。$\ell(w) = l$ となるときの $w = s_1 \cdots s_l$ を w の**最短表示**という。

命題 2 (Bruhat 分解)**.** (G, B, N, S) を Tits 系とすると

$$G = \bigsqcup_{w \in W} BwB$$

が成り立つ。

証明.　まず

$$G = \bigcup_{w \in W} BwB$$

を示す。$(BwB)^{-1} = Bw^{-1}B$ が成り立つ。また $BsB \cdot BwB \subseteq BwB \cup BswB$ が成り立つので、$w = s_1 \cdots s_l$ に対して

$$\begin{aligned} BwB \cdot Bw'B &\subseteq Bs_1B \cdots Bs_lB \cdot Bw'B \\ &\subseteq \bigcup_{\substack{0 \leq r \leq l \\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq l}} Bs_{i_1} \cdots s_{i_r} w'B \end{aligned}$$

となる。よって $\bigcup_{w \in W} BwB$ は G の部分群である。これは B, N を含むので、$G = \langle B, N \rangle$ を含む。よって G と等しい。

次に $w, w' \in W, BwB = Bw'B$ ならば $w = w'$ を示す。$\ell(w) \leq \ell(w')$ とし、$\ell(w)$ に関する帰納法で示す。$\ell(w) = 0$ のとき $w = 1$ である。$Bw'B = B$ とすると $B \cap N = T$ より $w' = 1$ である。いま、$\ell(w) > 0$ とする。$\ell(sw) < \ell(w)$ となる $s \in S$ がとれる。このとき

$$BswB \subseteq BsBwB = BsBw'B \subseteq Bw'B \cup Bsw'B$$

となる。両側剰余類なので、$BswB$ は $Bw'B$ または $Bsw'B$ に等しい。$BswB = Bw'B = BwB$ と仮定すると、帰納法の仮定より $sw = w$ となるが、これはあり得ない。よって $BswB = Bsw'B$ である。$\ell(sw) \leq \ell(sw')$ なので、帰納法の仮定より $sw = sw'$ すなわち $w = w'$ である。 □

2　Twin Tits 系と Birkhoff 分解

定義 3. (G, B_+, B_-, N, S) が **twin Tits 系**であるとは

1. G は群、B_+, B_-, N は G の部分群、$B_+ \cap N = B_- \cap N (= T)$ であり、S は $W = N/T$ の部分集合
2. $(G, B_\pm, N, S)$ は Tits 系
3. 任意の $s \in S, w \in W$ に対して、$\ell(sw) < \ell(w)$ ならば $B_\pm sB_\pm wB_\mp = B_\pm swB_\mp$
4. 任意の $s \in S$ に対して、$B_+s \cap B_- = \emptyset$

をみたすことをいう。

$G = SL_d(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$ とする。N をモノミアル行列からなる部分群とする。B_+ を $SL_d(\mathbb{C}[t])$ の行列であって $\mathrm{mod}\, t$ で上三角なもの全体とする。同様に B_- を $SL_d(\mathbb{C}[t^{-1}])$ の行列であって $\mathrm{mod}\, t^{-1}$ で下三角なもの全体とする。$W = N/T \cong S_d \rtimes \mathbb{Z}^{d-1}$ となる。W の生成系 S をうまく選ぶことで、(G, B_+, B_-, N, S) は twin Tits 系になる（はず)。

補題 4. (G, B_+, B_-, N, S) を twin Tits 系とすると、$s \in S, w \in W$ に対して

$$B_\pm sB_\pm wB_\mp \subseteq B_\pm swB_\mp \cup B_\pm wB_\mp$$

が成り立つ。等号成立条件は $\ell(sw) > \ell(w)$ である。

証明. $\ell(sw) < \ell(w)$ のときは twin Tits 系の公理から従うので、$\ell(sw) > \ell(w)$ の場合のみ考えればよい。(G, B_+, N, S) は Tits 系なので、$B_+sB_+sB_+ = B_+ \cup B_+sB_+$ が成り立つ。また twin Tits 系の公理より

$$B_+wB_- = B_+sB_+swB_-$$

となる。これらを用いて

$$\begin{aligned} B_+sB_+wB_- &= B_+s(B_+wB_-) \\ &= B_+s(B_+sB_+swB_-) \\ &= (B_+sB_+sB_+)swB_- \\ &= (B_+ \cup B_+sB_+)swB_- \\ &= B_+swB_- \cup B_+sB_+swB_- \\ &= B_+swB_- \cup B_+wB_- \end{aligned}$$

となる。$\pm$ を入れ替えたものも同様に成り立つ。 □

命題 5 (Birkhoff 分解)**.** (G, B_+, B_-, N, S) を twin Tits 系とすると

$$G = \bigsqcup_{w \in W} B_\pm wB_\mp$$

が成り立つ。

証明. まず $\bigcup_{w \in W} B_+wB_-$ は左からの W, B_+ の元の乗法で閉じている。よって $G = \bigsqcup_{w \in W} B_+wB_+$ の乗法でも閉じているので

$$G = \bigcup_{w \in W} B_+wB_-$$

が成り立つ。$w, w' \in W, B_+wB_- = B_+w'B_-$ ならば $w = w'$ を示す。$\ell(w) \leq \ell(w')$ とし、$\ell(w)$ に関する帰納法で示す。$\ell(w) = 0$ のとき $w = 1$ である。$B_+w'B_- = B_+B_-$ とする。$w' \neq 1$ と仮定すると $\ell(sw') < \ell(w')$ となる $s \in S$ がとれる。このとき補題より $B_+sw'B_- = B_+sB_+B_- = B_+sB_- \cup B_+B_-$ となる。左辺は 1 つの両側剰余類、右辺は 2 つの異なる両側剰余類より矛盾。

$\ell(w) > 0$ とする。$\ell(sw) < \ell(w)$ となる $s \in S$ をとる。$B_+swB_- = B_+sB_+wB_- = B_+sB_+w'B_- \subseteq B_+sw'B_- \cup B_+w'B_-$ である。Bruhat 分解のときと同様の議論により $B_+swB_- = B_+sw'B_-$ を得る。帰納法の仮定より $sw = sw'$ すなわち $w = w'$ である。 □

参考文献

[1] 森田純, *Kac-Moody* 群講義, 上智大学数学講究録, 2001.

[2] Peter Abramenko and Kenneth S. Brown, *Buildings. Theory and applications*, Springer, 2008.

[3] Timothée Marquis, *An Introduction to Kac–Moody Groups over Fields*, European Mathematical Society, 2018.