群論問題集

箱星

2024 年 8 月 28 日

1　群論の基礎

問 1. ある群において $ghg^{-1} = h^{-1}$ をみたす元 g, h がある。$(gh)^2 = g^2$ を示せ。

問 2. G は $g^{1028} = 1, g^{550} = 1$ をみたす元 g によって生成される非自明な巡回群である。G の位数を求めよ。

問 3. G を群とする。G から G への写像 $g \mapsto g^{-1}$ が準同型であることと G がアーベル群であることは同値であることを示せ。

問 4. H, K を部分群とするとき、HK が部分群であることと $HK = KH$ は同値であることを示せ。

問 5. G を群とする。
(a) G がアーベル群ならば、有限位数の元からなる部分集合 H は部分群であることを示せ。
(b) 非アーベル群 G および有限位数の元 $x, y \in G$ であって xy が無限位数となるような例を挙げよ。

問 6. 次を証明または反証せよ：群がアーベルであることと部分群がすべて正規であることは同値である。

問 7. G を巡回群とする。G の部分群は巡回群であることを示せ。

問 8. G を群とする。以下の各条件から、G がアーベル群であることが導かれるか。
(a) $f(a, b) = ab$ で定義される関数 $f\colon G \times G \to G$ は群準同型である。
(b) G は G/H が巡回群になるような正規部分群 H をもつ。
(c) G は G/H が巡回群かつ任意の $g \in G, h \in H$ に対して $gh = hg$ となるような正規部分群 H をもつ。

問 9. $\mathbb{F}$ を体とする。G を乗法群 $\mathbb{F} \setminus \{0\}$ の有限部分群とする。このとき G は巡回群であることを示せ。

問 10. H を G の部分群とする。$H \times G$ の部分群

$$L = \{(h, h) \mid h \in H\}$$

を考える。L が $H \times G$ の正規部分群であることと、H が G の中心に含まれることは同値であることを示せ。

問 11. x は奇数位数の群 G の元で、逆元と共役であるとする。このとき $x = e$ であることを示せ。

2　有限群の構造

問 1. p をある有限群の位数を割り切る最小の素数とする。このとき指数 p の部分群は正規であることを示せ。

問 2. p を素数とする。

（a）$n \geq 1$ に対して、位数 p^n の群は非自明な中心をもつことを示せ。

（b）(a) を用いて、位数 p^2 の群はすべてアーベル群であることを示せ。

問 3. 位数 8128 の単純群は存在しないことを示せ。

問 4. この問題の目標は位数 35 の群を同型を除いて分類することである。

（a）位数 35 のアーベル群を同型を除いてすべて求めよ。

（b）位数 35 の群はすべてアーベル群であることを示せ。

問 5. 位数 143 の群は巡回群であることを示せ。

問 6. G を位数 24 の群とする。G のどのシロー部分群も正規でないとする。このとき G は対称群 S_4 と同型であることを示せ。

問 7. 位数 30 の単純群は存在しないことを示せ。

問 8. ちょうど 2 つの共役類をもつ有限群を分類せよ。

問 9. ちょうど 3 つの共役類をもつ有限群を分類せよ。

問 10. p, q, r を $p < q < r$ をみたす素数とし、G を位数 pqr の群とする。このとき G は正規 Sylow 部分群を持つことを示せ。

3　対称群

問 1. S_n の位数 d の元の例をあげよ。存在しない場合はその理由を記せ。

（a）$n = 10, d = 30$

（b）$n = 11, d = 33$

問 2. S_n を $\{1, 2, \ldots, n\}$ の置換群とする。次の元の例をあげるか、存在しない理由を述べよ。

（a）S_{13} における位数 40 の元

（b）S_{16} における位数 34 の元

問 3. Q_8 を四元数群とする。$f\colon Q_8 \to S_n$ が単射準同型ならば、$n \geq 8$ であることを示せ。

問 4.（a）S_6 における位数 2 の元の共役類をすべて求めよ。

（b）A_6 についても同様のことを行え。

問 5. 対称群 S_3 の自己同型群を求めよ。

問 6. 交代群 A_5 は単純であることを示せ。A_4 は可解であることを示せ。

問 7. S_4 は $(1234), (1243)$ で生成されることを示せ。

問 8. 5 次交代群は位数 20 の部分群をもたないことを示せ。

問 9. G が S_n の部分群で $G \cap A_n = \{e\}$ をみたすならば $|G| \leq 2$ であることを示せ。

4 行列群

問 1. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5)$ の 5 シロー部分群の個数を求めよ。

問 2. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ を行列式が 1 の実数係数 2×2 行列の群とする。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。${}^t g$ を $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の転置とする。

(a) $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ に対し $\sigma g \sigma^{-1} = {}^t g^{-1}$ を示せ。

(b) 任意の $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ に対して $\tau g \tau^{-1} = {}^t g$ となるような $\tau \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ が存在しないのはなぜか。$\tau g \tau^{-1} = g^{-1}$ となる τ は存在するか。

問 3. S_4 は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)/Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3))$ と同型であることを示せ。

問 4. $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ の位数を求めよ。

問 5. G を $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ の有限部分群とする。G の位数は

$$\frac{1}{2}(3^n - 1)(3^n - 3) \cdots (3^n - 3^{n-1})$$

を割り切ることを示せ。ヒント：modulo 3 を用いる。